УДК 517.946

В. Г. ВОЙТКОВ, Л. О. ГЕРАСИМЧУК
Хмельницький національний університет

ІМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОПРУЖНОГО ПОЛЯ У ВИПАДКУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

В межах кореляційної теорії знайдені основні імовірнісні характеристики стохастичного термопружного поля для необмеженої циліндрично-анізотропної пластинки, що складається з n+1-го однорідного шару.

Зносостійкість та довговічність деталей, які в процесі експлуатації піддаються впливу випадкових температурних полів, залежить від імовірнісних характеристик термопружних полів, які при цьому виникають. Особливий інтерес становлять стохастичні термопружні поля в композитних матеріалах, які все більш широко використовуються в машинобудуванні.

Дослідження нестаціонарних температурних полів в кусково-однорідних пластинах методом гібридних інтегральних перетворень були розпочаті Б.М. Богатирьовим і М.П Ленюком [1] на основі розробленого останнім вказаного методу. В подальшому, метод гібридних інтегральних перетворень був застосований для дослідження динамічних термопружних полів [2]. Дослідження імовірнісних характеристик термопружних полів були розпочаті одним з авторів даної роботи і виконані для кусково-однорідних пластин, що володіють різними типами симетрій, зокрема, двоскладової необмежено тонкої пластини [3], для тонкої плоскої пластини, що має n точок спряження (обмеженої, необмеженої та напівобмеженої [4]), пластини, що має форму багатошарового кусково-однорідного круга [5]. У даній роботі наведено результати досліджень імовірнісних характеристик термопружних полів для необмежених кусково-однорідних циліндрично-анізотропних пластин.

Розглянемо (n+1)-складову необмежену пластину $P_n = \{r : r \in (R_0, R_1) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup ... \bigcup (R_n, R_{n+1})\}$, де $R_0 = 0$, $R_{n+1} = \infty$, яка має циліндричну анізотропію по відношенню до пружних сталих і має при $t \le 0$ нульову температуру. Нехай при $t > 0$ в пластині діють неперервно розподілені, випадкові в часі, теплові джерела.

Для визначення стохастичного нестаціонарного температурного поля, яке виникає в пластині P_n маємо задачу побудови обмеженого в області $D_n = \{(r,t) : r \in P_n,\, t \in (0, \infty)\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності В-параболічного типу [6]:

$$\frac{1}{a_i^2}\frac{\partial T_i}{\partial t} + \chi_i^2 T_i - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) T_i = f_i(t,r), \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

з нульовими початковими умовами та умовами неідеального термічного контакту

$$\begin{cases} \left[\left(b_i \dfrac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} + T_i(r,t)\right) - T_{i+1}(r,t)\right]\Bigg|_{r=R_i} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} - \nu_i \dfrac{\partial T_{i+1}(r,t)}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_i} = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Детермінований розв'язок задачі (1)-(2) будується методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі $r \ge 0$ з n точками спряження [2]:

$$T_i(r,t) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{ik}(t-\tau, r, \rho) f_k(\rho,\tau) \sigma_k \rho \, d\rho \, d\tau, \; i = \overline{1, n+1}, \; R_0 = 0, \; R_{n+1} = \infty, \tag{3}$$

де $H_{ik}(t-\tau, r, \rho)$ – функції впливу, що визначаються за формулами [2]:

$$H_{ik}(t, r, \rho) = e^{-s} \int_0^\infty e^{-\chi^2 t} V_k(r,\lambda)\, V_i(\rho,\lambda)\, d\lambda, \quad s = -a_{n+1}^2 \chi_{n+1}^2 t. \tag{4}$$

Припустимо, що функції $f_k(r, t)$ можна подати у вигляді добутку $\psi_k(r) \cdot g_k(t)$, де $\psi_k(r)$ – детерміновані функції, а $g_k(t)$ – стаціонарні в широкому розумінні випадкові функції часу, або у вигляді суми таких добутків.

Поклавши

$$G_{mi}(r,t) = \int_{R_{i-1}}^{R_i} H_{mi}(t,r,\rho) a_i^2 \psi_i(\rho) \sigma_i \rho \, d\rho, \ \ i,m = \overline{1, n+1},$$

детермінований розв'язок (3) задачі (1)-(2) набуде вигляду

$$T_m(r, t) = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^t G_{mi}(r, t-\tau) g_i(\tau) d\tau, \quad m = \overline{1, n+1}. \tag{5}$$

Внаслідок лінійності задачі (1)-(2) можна вважати, що математичне сподівання для стаціонарних функцій на кожному сегменті дорівнює нулю, тобто, $M[g_i(t)] = 0$, $i = \overline{1, n+1}$. Тоді для математичного сподівання детермінованого розв'язку $T_m(r, t)$ можна записати

$$M[T_m(r, t)] = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^t G_{mi}(r, t-\tau) M[g_i(\tau)] d\tau = 0, \ \ m = \overline{1, n+1}. \tag{6}$$

Для компонент кореляційної функції нестаціонарного температурного поля одержуємо вираз [7]

$$K_{T_m T_j}(r, t_1, t_2) = \sum_{i,k=1}^{n+1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G_{mi}(r, t_1 - \tau_1) G_{mk}(r, t_1 - \tau_1) \widetilde{K}_{ik}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \tag{7}$$

де $\widetilde{K}_{ik}(\tau_1, \tau_2) \equiv \widetilde{K}_{g_i g_k}(\tau_1, \tau_2)$ – елементи кореляційної матриці випадкового процесу, яким обумовлена інтенсивність теплових джерел, $m, i = \overline{1, n+1}$.

Звідси випливає наявність кореляційної матриці стохастичного нестаціонарного температурного поля $K_T(r, t_1, t_2) = \left\| K_{T_m T_i}(r, t_1, t_2) \right\|$, $\quad m, i = \overline{1, n+1}$. При $t_1 = t_2 = t$ маємо матрицю $\mathbf{D}_T(r, t) = \mathbf{K}_T(r, t, t)$, яка визначає потужність стохастичного нестаціонарного температурного поля пластині.

У випадку, якщо температурні поля, що породжені випадковими процесами $g_i(t)$ є незалежними, то $\widetilde{K}_{ik} = 0$ для всіх $i \neq k$, отже, в формулі для елементів кореляційної матриці (7) температурного поля залишиться тільки одна сума:

$$K_{T_m T_j}(r, t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G_{mi}(r, t_1 - \tau_1) G_{mi}(r, t_1 - \tau_1) \widetilde{K}_{ii}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{8}$$

Формула (8) набуває ще більш простого вигляду, у випадку незалежності температурних полів ділянок (R_{i-1}, R_i), де $i = \overline{1, n+1}$, а саме – $K_{T_m T_j} = 0$ при $m \neq j$, тобто кореляційна матриця $\mathbf{K}_T$ має діагональний вигляд.

Детерміноване поле напружень в пластині, що породжується нестаціонарним температурним полем, описується функціями [6]:

$$\sigma_{r,m} = E_{*m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu_{r\varphi, m}}{r} \right) u_m(r,t) - \alpha^*_{tm} T_m(r,t) \right], \tag{9}$$

$$\sigma_{\varphi, m} = E_{*m} \left[\left(\nu_{\varphi r, m} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{k_m^2}{r^2} \right) u_m(r,t) - \alpha^*_{tm} k_m^2 T_m(r,t) \right], \tag{10}$$

де функції $u_m(r, t)$ є обмеженим на множині P_n розв'язком сепаратної системи рівнянь руху

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k_m^2}{r^2} \right) u_m = -F_m(r, t), \tag{11}$$

на які накладено умови ідеального механічного контакту

$$\begin{cases} u_m(R_m, t) = u_{m+1}(R_m, t) \\ \sigma_{r,m}(R_m, t) = \sigma_{r,m+1}(R_m, t) \end{cases}, \qquad m = \overline{1, n}. \tag{12}$$

В (9)-(11) прийняті наступні позначення:

$$F_m(r, t) = \left(\alpha_{tm}^* \frac{\partial T_m(r, t)}{\partial r} + \alpha_{tm}^0 \frac{T_m(r, t)}{r} + \right), \; k_m^2 = \frac{E_{\varphi m}}{E_{r m}}, \; \mu_i = \frac{E_{* i+1}}{E_{* i}}, \; E_{* j} = \frac{E_{r j}}{1 + \nu_{r\varphi, j} \nu_{r\varphi, j}},$$

$$\alpha_{t j}^* = \alpha_{t j}^* + \nu_{r\varphi, j} \alpha_{\varphi j}^t, \; \alpha_{* j}^t = \alpha_{\varphi j}^t + \nu_{\varphi r, j} \alpha_{rj}^t, \; \alpha_{t j}^0 = \alpha_{t j}^* - k_j^2 \alpha_{* j}^t,$$

$$G_m(t) = \alpha_{t j}^* T_j(R_j, t) - \mu_j \, \alpha_{t j+1}^* T_{j+1}(R_j, t),$$

E_r, E_φ – модулі Юнга в радіальному і тангенціальному напрямках, $\alpha_r^t, \alpha_\varphi^t$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення, $\nu_{\varphi r}, \nu_{r\varphi}$ – головні коефіцієнти Пуассона (для ізотропного шару $\nu_{\varphi r} = \nu_{r\varphi}$).

Розв'язок задачі (9)-(12) будуємо методом гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі $r \geq 0$ з n точками спряження [8]. Наявність спектральної функції $W_{(k)}(r, \beta)$, вагової функції $\overline{\sigma}(r)$ і спектральної густини $\Omega_{(k)}(\beta)$ дає можливість визначити пряме (13) і обернене (14) гібридні перетворення Фур'є-Бесселя:

$$H_{(k)n}[f(r)] = \int_0^\infty f(r) W_{(k)}(r, \beta) \overline{\sigma}(r) \, dr \equiv \widetilde{f}(\beta), \tag{13}$$

$$H_{(k)n}^{-1}[\widetilde{f}(\beta)] = \int_0^\infty \widetilde{f}(\beta) W_{(k)}(r, \beta) \Omega_k(\beta) \, d\beta \equiv f(r). \tag{14}$$

Застосовуючи перетворення (13) до рівнянь руху (11), ми дістанемо алгебраїчне рівняння для визначення образу $\widetilde{u}(\beta, t)$ функції $u(r, t)$ при перетворенні (13):

$$-\beta^2 \widetilde{u}(\beta, t) = -\widetilde{F}(\beta, t) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\sigma}_j R_j W_{(k)j}(R_j, \beta) G_j(t). \tag{15}$$

Розв'язуючи (15) відносно $\widetilde{u}(\beta, t)$ і застосувавши обернене перетворення (14), одержимо

$$u_i(r, t) = \sum_{m=1}^{n+1} \int_{R_{i-1}}^{R_i} H_{(k)im}(r, \varphi) T_m(\rho, t) \overline{\sigma}_m \, \rho \, d\rho \tag{16}$$

Підставляючи в (16) функції $T_m(r, t)$, що визначені в (5), одержимо функції $u_i(r, t)$, $\sigma_{r,i}(r, t)$, $\sigma_{\varphi,i}(r, t)$:

$$u_i(r, t) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^\infty A_{(k)i j,1}(t - \tau, r) g_j(\tau) \, d\tau \equiv U_{(k)i1}, \tag{17}$$

$$\sigma_{r,i}(r, t) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^\infty A_{(k)i j,2}(t - \tau, r) g_j(\tau) \, d\tau \equiv U_{(k)i2}, \tag{18}$$

$$\sigma_{\varphi, i}(r, t) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^\infty A_{(k)i j,3}(t - \tau, r) g_j(\tau) \, d\tau \equiv U_{(k)i3}. \tag{19}$$

Функції впливу у формулах (17) – (19) мають вигляд

$$A_{(k)i j,1}(t, r) = \sum_{m=1}^{n+1} \int_0^\infty H_{(k)im}(r, \rho) G_{mj}(\rho, t) \overline{\sigma}_m \, \rho \, d\rho, \tag{20}$$

$$A_{(k)i j,2}(t, r) = E_{*i} \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu_{r\varphi,i}}{r} \right) A_{(k)i j,1}(t, r) - \alpha_{ti}^* \, G(r, t) \right], \tag{21}$$

$$A_{(k)ij,3}(t,r)=E_{*i}\left[\left(\nu_{r\varphi}\frac{d}{dr}+\frac{k_i^2}{r}\right)A_{(k)ij,1}(t,r)-\alpha_{ti}^{*}k_i^2\,G(r,t)\right], \tag{22}$$

Внаслідок (6) математичне сподівання

$$M[U_{(k)is}(r,t)]=0\ ,\ i=\overline{1,n+1},\ \ s=1,2,3\,.$$

Звідси для кореляційної матриці стохастичного квазістатичного термопружного поля одержуємо вираз

$$\mathbf{K}=\left\|\sum_{j,p=1}^{n+1}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}A_{(k)mj,i}(t_1-\tau_1,r)A_{(k)mp,s}(t_2-\tau_2,r)K_{jp}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\right\|. \tag{23}$$

Таким чином, ми одержали вирази для елементів кореляційної матриці термопружного поля, яке породжено випадковими тепловими процесами в пластині. В силу складності і громіздкості перетворень, одержані формули не дозволяють провести точні обчислення навіть у випадку найпростіших (і одночасно найпоширеніших) випадкових теплових процесів, зокрема, для $K=\delta(t_2-t_1)$ (“білий шум”) і для $K=\exp(-\chi\,|\,t_2-t_1\,|)$. Проте, одержані вирази є цілком придатними для проведення числових розрахунків і комп’ютерного моделювання описаних процесів. Результати такого моделювання та його аналіз автори мають намір привести у наступній роботі.

Список використаних джерел

1. Богатирьов Б.М., Ленюк М.П. Температурні поля. Ч. 1, 2. – К.: Інститут електродинаміки АН України, 1993. – 342 с.
2. Ленюк М.П., Стопень Г.Я. Динамічні задачі термопружності для багатоскладових циліндрично–анізотропним пластин // Препр. ІМ АН України, 93.42. – К.: ІМ АН України, 1993.
3. Войтков В.Г. Стохастична квазістатична задача термопружності для двоскладової необмеженої ізотропної тонкої пластини // Зб. Математическое моделирование, К.: ИМ НАНУ, 1996. – С. 60 – 63.
4. Войтков В.Г. Потужність динамічного термопружного поля в ізотропних напівобмежених кусково-однорідних тонких пластинах // Вестник ХГУ, Вып. 2 (8), 2000. – С. 59 – 61.
5. Войтков В.Г. Стохастична квазістатична задача термопружності для кусково-однорідних кругових циліндрично-анізотропних пластин // Зб. Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач, вип.6. – К.: ИМ НАНУ, 1994. – С. 229 – 235.
6. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наукова думка, 1976. – 310 с.
7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
8. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур’є-Бесселя // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Вип. 2, Ч. 1. – К.: ІМ АН України, 1993. – С. 79 – 91.